Combinatória POTI N3 Segundo Simulado

1) No filme Karatê Kid, uma cena famosa é a que o instrutor Mr Han, interpretado por Jack Chan, pede várias vezes para o seu discípulo Dre Parke, interpretado por Jaden Smith, colocar o casaco e tirar o casaco. Inspirado no filme e querendo treinar a arte de colocar e tirar casaco, a estudante Katara desenvolveu um robô que foi programado para dizer “Coloca casaco” ou “Tira casaco”. Katara então fez alguns testes com esse robô.

Inicialmente, Katara fala quantas vezes o robô deve falar “Coloca Casaco” e “Tira Casaco”. Então, o robô escolhe uma permutação aleatória, de forma equiprovável, dessas falas e a reproduz. Para os testes, Katara começa sem nenhum casaco e um treino é considerado válido se Katara consegue executá-lo, por exemplo, se o primeiro comando do robô for “Tira casaco”, como Katara não tem nenhum casaco, já é considerado um treino inválido. Katara pode usar vários casacos ao mesmo tempo.

a) Para o primeiro teste, Katara programou o robô para falar 5 vezes “Coloca casaco” e 5 vezes “Tira casaco”. Considerando que Katara tem 5 casacos nesse primeiro teste, qual a probabilidade de o treino reproduzido pelo robô ser um treino válido?

R: O total de casos é uma permutação com repetição:   
Os casos que estamos interessados coincide com o número de Catalan. Podemos visualizar isso com “Colocar Casaco” e “Tirar Casaco” sendo abrir e fechar parênteses, respectivamente, e Katara tem casacos suficientes para realizar todas as configurações. Como a fórmula foi passada em sala de aula, considero válida a aplicação da fórmula direto, assim como sua dedução: ->   
Portanto, a probabilidade é a divisão dos casos favoráveis dos casos totais, já que é equiprovável, resultando em (Observação interessante: para qualquer n inteiro maior que 0, o resultado seria ).

b) Para o segundo teste, Katara programou o robô para falar 8 vezes “Coloca casaco” e 4 vezes “tira casaco”. Considerando que Katara tem 7 casacos, qual a probabilidade de o treino reproduzido pelo robô ser um treino válido?  
  
R: Total de casos:   
Para calcular os casos favoráveis, podemos interpretar o exercício no plano cartesiano começando em (0,0) e tendo setas que sobem para direita ou que descem para a direita, até chegar no ponto (12,4). Exceção 1: tocar a linha y = -1 (porque estaria tirando casaco sem ter casaco); exceção 2: tocar a linha y = 8 (porque estaria colocando 8 casacos, mas Katara só possui 7); neste exercício, não há caso de intersecção (a exceção 1 e exceção 2 ocorrerem ao mesmo tempo) para se preocupar.

Exceção 1: Usando o princípio da reflexão, é o equivalente a começar em (0,-2) e chegar no destino original (12,4). Sendo S a seta que sobe para direita e D a seta que desce para direita, é possível resolver o seguinte sistema: , chegando em S = 9 e D = 3. Sendo assim, existem casos da exceção 1.

Exceção 2: Usando o princípio da reflexão, é o equivalente a começar em (0,16) e chegar no destino original (12,4). : , chegando em D = 12 e S = 0.  
Sendo assim, existem casos da exceção 2. Como é de fácil visualização que existe apenas um caso, considero válido mostrar o caso particular direto e dizer que é o único.

A união das exceções é 220 + 1 = 221. Logo, a probabilidade é: 1 -

c) Para o terceiro teste, Katara programou o robô para falar 6 vezes “Coloca casaco” e 5 vezes “Tira casaco”. Mas dessa vez, Katara possui apenas 3 casacos. Qual a probabilidade de um treino reproduzido pelo robô ser um treino válido?

R: Esse exercício é parecido com o anterior, só que existem vários casos de intersecção das exceções. Total: .

Exceção 1 (tocar em y = -1): Equivalente a começar em (0,-2) e chegar em (11,1). , S = 7 e D = 4. Casos =

Exceção 2 (tocar em y = 4): Equivalente a começar em (0,8) e chegar em (11,1).  
, D = 9 e S = 2. Casos =

Intersecção das exceções:  
  
Cenário 1 (primeiro tocar em y1 = -1 e depois em y2 = 4): Para chegar nesse cenário, primeiro refletimos o ponto de partida em relação a y1= -1. Assim, o ponto de partida ficaria em (0,-2). E agora, como queremos que o caminho passe por y2 = 4, refletimos apenas o ponto de partida em relação a y2, ficando (0, 10). Logo, o cenário 1 é equivalente a começar em (0,10) e chegar em (11,1). , D = 10 e S = 1. Casos =

Cenário 2 (primeiro tocar em y2 = 4 e depois em y1 = -1): De forma análoga, primeiro refletimos o ponto de partida em relação a y2 = 4. Assim, o ponto de partida ficaria em (0,8). Refletindo, agora, em relação a y1 = -1, temos que o ponto de partida é (0,-10) e o de chegada (11,1).  
, S = 11 e D = 0. Casos = É possível visualizar e escrever esse único caso tranquilamente.

Por fim, a união dos conjuntos das exceções é: 330 + 55 – (11+1) = 373. Logo, a probabilidade é 1 - .